♣ ♢ **Test d'entrée en CPGE ECS première année au lycée Descartes** $1,5h.$ ♡ ♠.

Ce test est destiné aux élèves du système marocain en classe de terminale sciences mathématiques. .

Mercredi 11 avril 2018 **Epreuve de mathématiques.**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La rédaction se fera exclusivement en langue française.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1 *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \mid \sin(nx) \mid \leq n \mid \sin x \mid$.

Exercice 2 *Soit x un réel. Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

Exercice 3 *<u>Notations :</u> Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable n fois, alors $\dfrac{d^n}{dx^n} f$, ou encore $f^{(n)}$, désignent la dérivée n-ième de la fonction f. Par convention, $\dfrac{d^0}{dx^0} f = f^{(0)} = f$.*

Si k et n sont des entiers naturels, $\dbinom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & si\ n \geq k \\ 0 & sinon \end{cases}$

On rappelle la formule de Leibniz : Si f et g sont deux fonction dérivables n fois sur $\mathbb{R}$ alors $f \cdot g$ l'est aussi et $(f \cdot g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$.

Soit n un entier naturel. On considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

1. (a) *Calculer* P_1, P_2.
   (b) *Montrer que P_n est un polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.*
   (c) *Calculer* $\dfrac{d^n}{dx^n} \left((x-1)^n (x+1)^n\right)$.
   En déduire que $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k} (x+1)^k$.
   (d) *En déduire* $P_n(1)$ *et* $P_n(-1)$.

Exercice 4 *On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par :*
$f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$, *et la fonction g définie par : $g(t) = \dfrac{\cos(t)-1}{t}$ si $t \neq 0$.*

1. *Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, étudier sa parité. Montrer que f est dérivable en tout $x \neq 0$, et calculer $f'(x)$.*
2. *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $f(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.*
3. *Justifier que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, encore notée g. Calculer alors la limite quand x tend vers 0 de $h(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{d}t$.*
4. *En déduire que f admet une limite quand x tend vers 0.*

Exercice 5 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$.*

1. *Étudier la monotonie de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,*
   et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. Conclure.
2. (a) *Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \dfrac{\ln(2)}{n+1} - \dfrac{2}{n+1}J_{n+2}$.*
   (b) *En déduire la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, préciser sa limite.*